奥野正寛編著『ミクロ経済学』補足

奥野正寛・猪野弘明・加藤晋・川森智彦・矢野智彦・山口和男

2013 年 12 月 31 日

1　双対性

教科書の復習　教科書 1.6.1 節では，図 1.14（図 1 に転載）を用いて，**価格効果** (price effect) が**代替効果** (substitution effect) と**所得効果** (income effect) に分解できることを示した (教科書 pp. 62，命題 1.4).

価格変化（$p_1^0 \to p_1^1$）に対して，

- 通常の需要曲線（右パネル D^0D^1）による需要変化 ($x_1^0 \to x_1^1$) が全体の価格効果
- 補償需要曲線（右パネル D^0D^c）によって取り出された需要変化 ($x_1^0 \to x_1^c$) が代替効果
- 両者の乖離である残りの需要変化（$x_1^c \to x_1^1$）が所得効果

である.

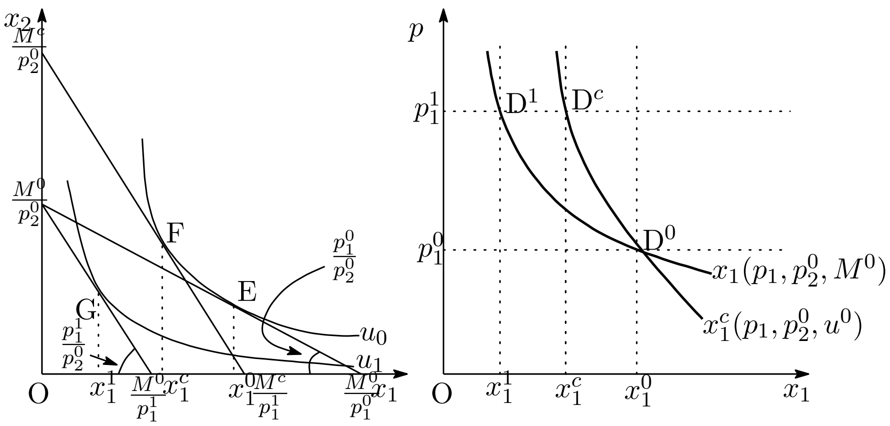

図 1: 代替効果と所得効果

さらに，この分解は価格変化を微小にとったとき，以下の**スルツキー方程式** (Slutsky equation) で表わされる（教科書 pp. 62–63「■スルツキー方程式」参照）:

$$\frac{\partial x_1^D(p_1,p_2,M)}{\partial p_1} = \frac{\partial x_1^c(p_1,p_2,u)}{\partial p_1} - x_1^D(p_1,p_2,M)\cdot\frac{\partial x_1^D(p_1,p_2,M)}{\partial M}.$$

限界的な価格変化（p_1 の微小な変化）に対して，

- 価格効果は $\partial x_1^D(p_1, p_2, M)/\partial p_1$（点 D^0 における通常の需要曲線の傾き[1]）
- 代替効果は $\partial x_1^c(p_1, p_2, u)/\partial p_1$（点 D^0 における補償需要曲線の傾き）
- 所得効果は $-x_1^D(p_1, p_2, M) \cdot \partial x_1^D(p_1, p_2, M)/\partial M$（両者の傾きの差）

である．

しかし教科書では，スルツキー方程式の数学的な導出は省略し，解説は直観的な説明に止めた．実は，この式は，教科書で扱った効用最大化問題に加えて，それと対をなす支出最小化問題を考えることで，効率よく証明できることが知られている．支出最小化問題によって，スルツキー方程式の中で使われている補償需要関数やシェパードの補題を導出・証明することができるためである．この分析方法は**双対性** (duality) アプローチと呼ばれる．そこでこの節では，スルツキー方程式の導出を目標として，双対性アプローチを入門的に紹介しよう．なお，本節では主に 2 財の場合について議論を進める．ただし，特に断らない限り，3 財以上の一般の場合でも同様の結論を得ることができる．

1.1　効用最大化問題と支出最小化問題

効用最大化問題　**効用最大化問題** (utility maximization problem)

$$\begin{aligned} \max_{(x_1,x_2)} \quad & u(x_1, x_2) \\ \text{subject to} \quad & p_1x_1 + p_2x_2 = M \end{aligned}$$

について考える．このラグランジュ関数は，

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda, p_1, p_2, M) = u(x_1, x_2) + \lambda(M - p_1x_1 - p_2x_2)$$

であり，1 階条件は，

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_i} - p_i\lambda = 0 \\ M - p_1x_1 - p_2x_2 = 0 \end{aligned}$$

である．これより，効用最大化問題の解が満たすべき条件は，

$$\begin{aligned} MRS_{12}(x_1, x_2) = \frac{p_1}{p_2} \\ p_1x_1 + p_2x_2 = M \end{aligned}$$

である．この最大化問題の解を $(x_1^D(p_1, p_2, M), x_2^D(p_1, p_2, M))$，最大値を $v(p_1, p_2, M) = u(x_1^D(p_1, p_2, M), x_2^D(p_1, p_2, M))$ とし，1 階条件を満たすラグランジュ乗数を $\lambda^*(p_1, p_2, M)$ とする．言うまでもなく，関数 x_i^D は第 i 財の通常の**需要関数** (demand function)，すなわち，**マーシャルの需要関数** (Marshallian demand function) である．また，最大化された効用の値を表す関数 v を**間接効用関数** (indirect utility function) と言う．

教科書で学んだように，効用最大化問題の解は，図 1 左パネルの点 E や点 G のように，

[1]正確には従属変数である価格 p_1 が縦軸に描かれているため「傾きの逆数」である（以下同様）．

> 予算 $p_1x_1 + p_2x_2$ の水準（予算線）を固定して，その予算線上で効用が最も大きくなる，つまり無差別曲線が最も右上に来るように描いた接点

として表される．

支出最小化問題　**支出最小化問題** (expenditure minimization problem) と呼ばれる最小化問題

$$\begin{aligned}\min_{(x_1,x_2)} \quad & p_1x_1 + p_2x_2 \\ \text{subject to} \quad & u(x_1,x_2) = \bar{u}\end{aligned}$$

について考える．これは，効用 $\bar{u}$ をもたらす消費計画の内，最も支出が少ないものを見つけるという問題である．このラグランジュ関数は，

$$\mathcal{M}(x_1,x_2,\mu,p_1,p_2,\bar{u}) = p_1x_1 + p_2x_2 + \mu(\bar{u} - u(x_1,x_2))$$

であり，1 階条件は，

$$\begin{aligned} p_i - \mu\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_i} &= 0 \\ \bar{u} - u(x_1,x_2) &= 0 \end{aligned}$$

である．この第 1 式より，

$$\mu\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_i} = p_i$$

が得られ，これに $i=1$ を代入した式を，$i=2$ を代入した式で各辺ごとに除せば，

$$\frac{\partial u(x_1,x_2)/\partial x_1}{\partial u(x_1,x_2)/\partial x_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

となり，左辺が第 1 財の第 2 財で測った限界代替率 $MRS_{12}(x_1,x_2)$ と等しいことに注意すれば，支出最小化問題の解が満たすべき条件が

$$MRS_{12}(x_1,x_2) = \frac{p_1}{p_2} \tag{1}$$

$$u(x_1,x_2) = \bar{u} \tag{2}$$

であることが分かる．この最小化問題の解を $(x_1^c(p_1,p_2,\bar{u}), x_2^c(p_1,p_2,\bar{u}))$，最小値を $e(p_1,p_2,\bar{u}) = p_1x_1^c(p_1,p_2,\bar{u}) + p_2x_2^c(p_1,p_2,\bar{u})$ とし，1 階条件を満たすラグランジュ乗数を $\mu^*(p_1,p_2,\bar{u})$ とする．関数 x_i^c を第 i 財の**補償需要関数** (compensated demand function)，もしくは，**ヒックスの需要関数** (Hicksian demand function) と言う．また，最小化された支出額を表す関数 e を**支出関数** (expenditure function) と言う．

支出最小化問題の解は，図 1 左パネルの点 E や点 F のように，

> 効用の水準（無差別曲線）を固定して，その無差別曲線上で支出 $p_1x_1 + p_2x_2$ が最も小さくなる，つまりそれを表す線が最も左下に来るように描いた接点

として表される．

1.2　4つの関数の基本的性質

4つの関数の関係　$(x_1, x_2) = (x_1^c(p_1, p_2, \bar{u}), x_2^c(p_1, p_2, \bar{u}))$ は式 (1) を満たすので，

$$MRS_{12}(x_1^c(p_1, p_2, \bar{u}), x_2^c(p_1, p_2, \bar{u})) = \frac{p_1}{p_2} \tag{3}$$

となる．また，定義より，

$$p_1 x_1^c(p_1, p_2, \bar{u}) + p_2 x_2^c(p_1, p_2, \bar{u}) = e(p_1, p_2, \bar{u}) \tag{4}$$

である．ところで，所得が $e(p_1, p_2, \bar{u})$ である時の効用最大化問題

$$\begin{aligned} \max_{(x_1, x_2)} \quad & u(x_1, x_2) \\ \text{subject to} \quad & p_1 x_1 + p_2 x_2 = e(p_1, p_2, \bar{u}) \end{aligned}$$

の解が満たすべき条件は

$$\begin{aligned} MRS_{12}(x_1, x_2) &= \frac{p_1}{p_2} \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 &= e(p_1, p_2, \bar{u}) \end{aligned}$$

である．式 (3)，式 (4) より，$(x_1, x_2) = (x_1^c(p_1, p_2, \bar{u}), x_2^c(p_1, p_2, \bar{u}))$ がこの 1 階条件を満たしていることがわかる．ゆえに，$(x_1^c(p_1, p_2, \bar{u}), x_2^c(p_1, p_2, \bar{u}))$ は，この最大化問題の解 $(x_1^D(p_1, p_2, e(p_1, p_2, \bar{u})), x_2^D(p_1, p_2, e(p_1, p_2, \bar{u})))$ と一致する：

$$x_i^c(p_1, p_2, \bar{u}) = x_i^D(p_1, p_2, e(p_1, p_2, \bar{u})). \tag{5}$$

定義より，

$$v(p_1, p_2, e(p_1, p_2, \bar{u})) = u(x_1^D(p_1, p_2, e(p_1, p_2, \bar{u})), x_2^D(p_1, p_2, e(p_1, p_2, \bar{u})))$$

である．この右辺に式 (5) を代入すると，

$$v(p_1, p_2, e(p_1, p_2, \bar{u})) = u(x_1^c(p_1, p_2, \bar{u}), x_2^c(p_1, p_2, \bar{u}))$$

となる．$(x_1^c(p_1, p_2, \bar{u}), x_2^c(p_1, p_2, \bar{u}))$ は支出最小化問題の制約条件を満たすので，

$$u(x_1^c(p_1, p_2, \bar{u}), x_2^c(p_1, p_2, \bar{u})) = \bar{u}$$

が成り立つことに注意すると，

$$v(p_1, p_2, e(p_1, p_2, \bar{u})) = \bar{u}$$

が得られる．間接効用関数と補償需要関数の合成関数および間接効用関数と支出関数の合成関数についても，同様の結果が得られる．まとめると次の命題になる．

命題 1.

$$\begin{aligned} x_i^D(p_1, p_2, e(p_1, p_2, \bar{u})) &= x_i^c(p_1, p_2, \bar{u}) \\ v(p_1, p_2, e(p_1, p_2, \bar{u})) &= \bar{u} \\ x_i^c(p_1, p_2, v(p_1, p_2, M)) &= x_i^D(p_1, p_2, M) \\ e(p_1, p_2, v(p_1, p_2, M)) &= M. \end{aligned}$$

同次性　α を整数とする．このとき，任意の $t>0$ と任意の $(x_1,\dots,x_n)$ について，

$$f(tx_1,\dots,tx_n)=t^\alpha f(x_1,\dots,x_n)$$

が成り立つとき，関数 f を α **次同次関数** (homogeneous function of degree α) と言う[2]．α 次同次関数とは，すべての変数を t 倍すると関数の値が t^α 倍になる関数である．

教科書 (p. 45，命題 1.3) では，(通常の) 需要関数は単なる単位の付け替えによっては変化しないこと，すなわち 0 次同次関数であることを学んだ: 任意の $t>0$ と任意の $(x_1,\dots,x_n)$ について，

$$x_i^D(tp_1,tp_2,tM)=x_i^D(p_1,p_2,M)$$

が成り立つ[3]．このことから，任意の $t>0$ と任意の $(x_1,\dots,x_n)$ について，

$$\begin{aligned}v(tp_1,tp_2,tM)&=u(x_1^D(tp_1,tp_2,tM),x_2^D(tp_1,tp_2,tM))\\&=u(x_1^D(p_1,p_2,M),x_2^D(p_1,p_2,M))\\&=v(p_1,p_2,M)\end{aligned}$$

が成り立つ．すなわち，間接効用関数も 0 次同次関数であることが分かる．2 つの財の価格と所得が同時に $t>0$ 倍に変化しても最適消費計画は変化しないため，その下で得られる効用水準にも変化がないことを意味している．

実は，これらの性質に対応する性質が，補償需要関数および支出関数でも成り立つ．まず効用を一つ固定し，$\bar{u}$ とする．価格の組 (p_1,p_2) と両財の価格を $t>0$ 倍した価格の組 (tp_1,tp_2) について考えよう．どちらの価格の組の下でも支出最小化問題の制約条件は同一である．また，(p_1,p_2) の下での目的関数は $p_1x_1+p_2x_2$ であり，(tp_1,tp_2) の下での目的関数は $(tp_1)x_1+(tp_2)x_2=t(p_1x_1+p_2x_2)$ なので，後者は前者を単調変換した（関数の大小関係が保たれている）ものであることがわかる．よって，二つの価格の組の下での支出最小化問題の解は一致する．つまり，任意の $t>0$ と任意の $(x_1,\dots,x_n)$ について，

$$x_i^c(p_1,p_2,\bar{u})=x_i^c(tp_1,tp_2,\bar{u})$$

が成り立つ．このことから，任意の $t>0$ と任意の $(x_1,\dots,x_n)$ について，

$$\begin{aligned}e(tp_1,tp_2,tM)&=(tp_1)x_1^c(tp_1,tp_2,\bar{u})+(tp_2)x_2^D(tp_1,tp_2,\bar{u})\\&=t(p_1x_1^c(p_1,p_2,\bar{u})+p_2x_2^D(p_1,p_2,\bar{u}))\\&=te(p_1,p_2,\bar{u})\end{aligned}$$

が成り立つ[4]．すなわち，支出関数は 1 次同次関数であることが分かる．

以上の性質を次の命題の形でまとめておく．

[2] この定義は，教科書 p. 45，脚注 16 にも書かれている．
[3] 右辺に $t^0=1$ が乗じられていると見れば，0 次同次関数の定義を満たしていることが分かる．
[4] 最右辺の t を t^1 であると見れば，1 次同次関数の定義を満たしていることが分かる．

命題 2.

(i) 需要関数 x_i^D は 0 次同次関数である．

(ii) 間接効用関数 v は 0 次同次関数である．

(iii) (p_1, p_2) に $x_i^c(p_1, p_2, M)$ を対応させる関数は 0 次同時関数である．

(iv) (p_1, p_2) に $e(p_1, p_2, M)$ を対応させる関数は 1 次同次関数である．

単調性　教科書の 1.4，1.5，1.6 節で見たとおり，所得が増加したり，自己価格が低下するとき，需要量は増加する場合も減少する場合もある．一方，間接効用関数については，所得が増加したり，価格が低下するとき，より多くの財を消費することができるため，選好の単調性より，間接効用関数の値は増加する．厳密に言うと，間接効用関数の値は，所得の増加に対し増加するのに対し，価格の低下に対しては減少することはない（増加するかまたは変化しない[5]）．

支出関数については，効用が減少するとき，より少ない財で所与の効用を達成することができるため，支出関数の値は減少する．また，価格が低下するとき，各消費計画に対する支出が減少するため，支出関数の値は減少する．厳密に言うと，支出関数の値は，効用の減少に対し減少するのに対し，価格の低下に対しては増加することはない（減少するかまたは変化しない）．

以上の性質を次の命題の形でまとめておく．

命題 3.

(i) 間接効用関数 $v(p_1, p_2, M)$ は M の増加関数であり，p_i の非増加関数である．

(ii) 支出関数 $e(p_1, p_2, \bar{u})$ は $\bar{u}$ の増加関数であり，p_i の非減少関数である．

ここで，$x < x'$ なら $f(x) < f(x')$ である関数 f を増加関数と言い，$x \leq x'$ なら $f(x) \leq f(x')$ である関数 f を非減少関数と言い，$x < x'$ なら $f(x) > f(x')$ である関数 f を減少関数と言い，$x \leq x'$ なら $f(x) \geq f(x')$ である関数 f を非増加関数と言う．

命題 3 に証明を与えておく．

証明. (i) の前半：所得増加前の最適消費計画を $\boldsymbol{x}^0$ とし，増加後のそれを $\boldsymbol{x}^1$ とする．このとき，所得増加後の予算線は $\boldsymbol{x}^0$ の右上に存在するため，所得増加後の予算線上に，$\boldsymbol{x}^0$ よりも両財の消費量が多い消費計画 $\boldsymbol{x}'$ が存在する．選好の単調性より，$u(\boldsymbol{x}^0) < u(\boldsymbol{x}')$ が成り立つ．また，$\boldsymbol{x}'$ は所得増加後の効用最大化問題の制約条件を満たし，かつ，$\boldsymbol{x}^1$ は所得増加後の効用最大化問題の解であるので，$u(\boldsymbol{x}') \leq u(\boldsymbol{x}^1)$ が成り立つ．以上から，$u(\boldsymbol{x}^0) < u(\boldsymbol{x}^1)$ が言える．すなわち，所得の増加により，最大化された効用，つまり，間接効用関数の値が増加する．

(i) の後半：第 1 財の価格が低下した場合を考える．価格低下前の最適消費計画を $\boldsymbol{x}^0$ とし，低下後のそれを $\boldsymbol{x}^1$ とする．(a) 価格低下後の予算線上に，$\boldsymbol{x}^0$ よりも両財の消費量が多い消費計画 $\boldsymbol{x}'$ が存在する場合を考える．このとき，選好の単調性より，$u(\boldsymbol{x}^0) < u(\boldsymbol{x}')$ が成り立つ．また，$\boldsymbol{x}'$ は

[5] 変化しない場合があるのは，そもそも当該財を消費していない場合があるためである．価格変化に関わらず，それらの価格帯ではその財を消費しないのであれば，当該の価格変化は効用水準に無関係である．

価格低下後の効用最大化問題の制約条件を満たし，かつ，$\boldsymbol{x}^1$ は価格低下後の効用最大化問題の解であるので，$u(\boldsymbol{x}') \leq u(\boldsymbol{x}^1)$ が成り立つ．以上から，$u(\boldsymbol{x}^0) < u(\boldsymbol{x}^1)$ が言える．(b) 価格低下後の予算線上に，$\boldsymbol{x}^0$ よりも両財の消費量が多い消費計画が存在しない場合を考える．このとき，$\boldsymbol{x}^0$ は価格低下前の予算線が軸と交わる点（端点）であり，これは価格低下後の予算線上の点でもあることがわかる．よって，$\boldsymbol{x}^0$ は価格低下後の効用最大化問題の制約条件を満たしている．このことと $\boldsymbol{x}^1$ が価格低下後の効用最大化問題の解であることから，$u(\boldsymbol{x}^0) \leq u(\boldsymbol{x}^1)$ が成り立つ．(a)，(b) より，価格の低下により，最大化された効用，つまり，間接効用関数の値が減少しない．第 2 財の価格の低下についても同様である．

(ii) の前半:効用減少前の支出最小化問題の解を $\boldsymbol{x}^0 = (x_1^0, x_2^0)$ とし，減少後のそれを $\boldsymbol{x}^1 = (x_1^1, x_2^1)$ とする．このとき，効用減少後の無差別曲線は $\boldsymbol{x}^0$ の左下に存在するため，効用減少後の無差別曲線上に，$\boldsymbol{x}^0$ よりも両財の消費量が少ない消費計画 $\boldsymbol{x}' = (x_1', x_2')$ が存在する．価格が正であることから，$p_1x_1^0 + p_2x_2^0 > p_1x_1' + p_2x_2'$ が成り立つ．また，$\boldsymbol{x}'$ は効用減少後の支出最小化問題の制約条件を満たし，かつ，$\boldsymbol{x}^1$ は効用減少後の支出最小化問題の解であるので，$p_1x_1' + p_2x_2' \geq p_1x_1^1 + p_2x_2^1$ が成り立つ．以上から，$p_1x_1^0 + p_2x_2^0 > p_1x_1^1 + p_2x_2^1$ が言える．すなわち，効用の減少により，最小化された支出，つまり，支出関数の値が減少する．

(ii) の後半：第 1 財の価格が p_1^0 から p_1^1 に低下した場合を考える．価格低下前の支出最小化問題の解を $\boldsymbol{x}^0 = (x_1^0, x_2^0)$ とし，低下後のそれを $\boldsymbol{x}^1 = (x_1^1, x_2^1)$ とする．このとき，$p_1^0 > p_1^1$ より，$p_1^0x_1^0 + p_2x_2^0 \geq p_1^1x_1^0 + p_2x_2^0$ が成り立つ（等号は $x_1^0 = 0$ のときに成立）．また，$\boldsymbol{x}^0$ は価格低下後の支出最小化問題の制約条件を満たし，かつ，$\boldsymbol{x}^1$ は価格低下後の支出最小化問題の解であるので，$p_1^1x_1^0 + p_2x_2^0 \geq p_1^1x_1^1 + p_2x_2^1$ が成り立つ．以上から，$p_1^0x_1^0 + p_2x_2^0 \geq p_1^1x_1^1 + p_2x_2^1$ が言える．すなわち，価格の低下により，最小化された支出，つまり，支出関数の値が増加しない．第 2 財の価格の低下についても同様である． □

1.3 シェパードの補題・ロワの恒等式

包絡線定理 まず，数学的準備として，「包絡線定理」と呼ばれる定理を証明する．この定理を用いることで，シェパードの補題などがたちどころに証明される．以下では，次の多変数関数の合成関数の微分の公式を用いる．

定理 1 (多変数関数の合成関数の微分)**.**

$$\frac{df(g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x))}{dx} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x))}{\partial g_i(x)} \frac{dg_i(x)}{dx}.$$

あるパラメーター $\boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_m)$ が与えられた下での，$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ についての等号制約条件付き最大化問題

$$\begin{aligned} \max_{\boldsymbol{x}} \quad & f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}) \\ \text{subject to} \quad & g^k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}) = 0 \quad (k = 1, \ldots, l) \end{aligned} \tag{6}$$

について考える．このラグランジュ関数は，

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{x}, \lambda, \boldsymbol{t}) = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}) + \sum_{k=1}^{l} \lambda_k g^k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})$$

であり，1 階条件は，

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})}{\partial x_i}+\sum_{k=1}^{l}\lambda_k\frac{\partial g^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})}{\partial x_i}=0 \quad (i=1,\dots,n) \tag{7}$$

$$g^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})=0 \quad (k=1,\dots,l) \tag{8}$$

である．この最大化問題の解を $\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{t})$，最大値を $f^*(\boldsymbol{t})=f(\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{t})$ とし，1 階条件を満たすラグランジュ乗数を $\lambda^*(\boldsymbol{t})$ とする．一階条件からなる方程式の解である $(\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{t}),\lambda^*(\boldsymbol{t}))$ は，(従って最大値 $f^*(\boldsymbol{t})$ も）パラメーター $\boldsymbol{t}$ に依存して変化することに注意してほしい．

このとき，包絡線定理 (envelope theorem) と呼ばれる次の定理が成り立つ．

定理 2 (包絡線定理)**.**

$$\frac{\partial f^*(\boldsymbol{t})}{\partial t_j}=\frac{\partial\mathcal{L}(\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{t}),\lambda^*(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{t})}{\partial t_j}.$$

ラグランジュ関数 $\mathcal{L}(\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{t}),\lambda^*(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{t})$ の t_j への依存の仕方を二つに分けることができる．一つは，$\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{t})$，$\lambda^*(\boldsymbol{t})$ を経由しての間接的な依存であり，もう一つは，直接的な依存である（ラグランジュ関数の括弧内に列挙された三つの内の三つ目の $\boldsymbol{t}$ による影響）．**包絡線定理の右辺 $\partial\mathcal{L}(\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{t}),\lambda^*(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{t})/\partial t_j$ は，この直接的な部分についての偏微分を表わしている**ことに注意する．すなわち，間接的な影響である $\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{t})$ や $\lambda^*(\boldsymbol{t})$ は固定し，直接的な影響の部分についてのみ微分すればよい．

証明. 合成関数の微分公式より，

$$\frac{\partial f^*(\boldsymbol{t})}{\partial t_j}=\frac{df(\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{t})}{dt_i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{t})}{\partial x_i}\frac{\partial x_i^*(\boldsymbol{t})}{\partial t_j}+\frac{\partial f(\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{t})}{\partial t_j}. \tag{9}$$

$(\boldsymbol{x},\lambda)=(x^*(\boldsymbol{t}),\lambda^*(\boldsymbol{t}))$ は式 (7) を満たすので，

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{t})}{\partial x_i}+\sum_{k=1}^{l}\lambda_k^*(\boldsymbol{t})\frac{\partial g^k(\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{t})}{\partial x_i}=0,$$

すなわち，

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{t})}{\partial x_i}=-\sum_{k=1}^{l}\lambda_k^*(\boldsymbol{t})\frac{\partial g^k(\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{t})}{\partial x_i}$$

となる．これを式 (9) に代入すると，

$$\frac{\partial f^*(\boldsymbol{t})}{\partial t_j}=-\sum_{k=1}^{l}\lambda_k^*(\boldsymbol{t})\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g^k(\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{t})}{\partial x_i}\frac{\partial x_i^*(\boldsymbol{t})}{\partial t_j}+\frac{\partial f(\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{t})}{\partial t_j} \tag{10}$$

となる．$x=x^*(\boldsymbol{t})$ は式 (8) を満たすので，

$$g^k(\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{t})=0$$

となり，これは恒等式なので t_j で両辺を偏微分することができることから，

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g^k(\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{t}),y)}{\partial x_i}\frac{\partial x_i^*(\boldsymbol{t})}{\partial t_j}+\frac{\partial g^k(\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{t})}{\partial t_j}=0,$$

すなわち,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g^k(\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{t}), y)}{\partial x_i} \frac{\partial x_i^*(\boldsymbol{t})}{\partial t_j} = -\frac{\partial g^k(\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{t})}{\partial t_j}$$

となる．これを式 (10) に代入すると,

$$\frac{\partial f^*(\boldsymbol{t})}{\partial t_j} = \frac{\partial f(\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{t})}{\partial t_j} + \sum_{k=1}^{l} \lambda_k^*(\boldsymbol{t}) \frac{\partial g^k(\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{t})}{\partial t_j} \tag{11}$$

が得られる．一方,

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{t}), \lambda^*(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{t})}{\partial t_j} = \frac{\partial f(\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{t})}{\partial t_j} + \sum_{k=1}^{l} \lambda_k^*(\boldsymbol{t}) \frac{\partial g^k(\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{t})}{\partial t_j} \tag{12}$$

が得られる．式 (11) と式 (12) の右辺同士が等しいことが分かるので,

$$\frac{\partial f^*(\boldsymbol{t})}{\partial t_j} = \frac{\partial \mathcal{L}(\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{t}), \lambda^*(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{t})}{\partial t_j}$$

が得られる． □

ここで，制約なしの最大化問題

$$\max_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}) \tag{13}$$

について考える．この最大化問題の解を $\boldsymbol{x}^{**}(\boldsymbol{t})$，最大値を $f^{**}(\boldsymbol{t}) = f(\boldsymbol{x}^{**}(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{t})$ とすると，先に述べた包絡線定理（定理 2）の特殊ケースである次の系が成り立つ[6].

系 1 (制約なし最大化問題での包絡線定理)**.**

$$\frac{\partial f^{**}(\boldsymbol{t})}{\partial t_j} = \frac{\partial f(\boldsymbol{x}^{**}(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{t})}{\partial t_j}.$$

包絡線定理の直観と図解　ここで，長期と短期の費用関数の関係を例に，制約なしの包絡線定理の直観的な説明と図解を行いたい（このパラグラフに興味のない読者や生産者行動をまだ学んでいない読者は飛ばして読み進めてもよい）．この例では生産量を q で表す[7]. 教科書 2.10.1 節にあるように，資本 K を固定した短期費用関数 $C(q, K)$ から長期費用関数を求める問題は,

$$\min_{K} C(q, K) \tag{15}$$

[6]問題 (6) において制約式が 1 本で subject to 0=0 である場合，すなわち

$$\begin{aligned} \max_{\boldsymbol{x}} \quad & f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}) \\ \text{subject to} \quad & 0 = 0 \end{aligned} \tag{14}$$

をという問題を考える．この制約は最大化と関係ないので，この問題は制約なしの最大化問題 (13) と一致する．このとき，最大化問題 (14) のラグランジュ関数の第 2 項は消えてしまうことに注意して，最大化問題 (14) に定理 2 を用いると，系 1 が得られる．

[7]教科書では，生産量は q の代わりに x で表していた．

	問題 (13)	問題 (15)
変数	$\boldsymbol{x}$ $(n=1)$	K
パラメーター	$\boldsymbol{t}$ $(m=1)$	q
目的関数	$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})$	$-C(q, K)$
解	$x^{**}(\boldsymbol{t})$	$\hat{K}^{LD}(q)$
最大値	$f^{**}(\boldsymbol{t})$	$-C^L(q)$

表 1: 問題 (15) と問題 (13) の対応関係

であり，この最小化問題の解が資本の生産量条件付要素需要関数 $\hat{K}^{LD}(q)$，最小値が長期費用関数 $C^L(q) = C(q, \hat{K}^{LD}(q))$ である．問題 (15) は最小化問題だが，目的関数にマイナスを付けることで最大化問題に変換できるので[8]，問題 (15) は本質的には制約なしの最大化問題 (13) の一例になっている．問題 (15) と問題 (13) の対応関係は表 1 のようになる．包絡線定理（系 1）をこの最小化問題に適用すると，

$$\frac{\partial C^L(q)}{\partial q} = \frac{\partial C(q, \hat{K}^{LD}(q))}{\partial q} \tag{16}$$

となる[9]．これは，教科書 p. 122 で述べた「長期限界費用 $MC^L(q)$ と $K = \hat{K}^{LD}(q)$ に固定したときの短期限界費用 $MC(q, \hat{K}^{LD}(q))$ は一致する」ことを表す式に他ならない．

ここで，包絡線定理の直観的な意味を考えてみる．長期費用関数の定義より $C^L(q) = C(q, \hat{K}^{LD}(q))$ なので，これを q で微分すると，合成関数の微分の公式より，

$$\frac{\partial C^L(q)}{\partial q} = \frac{\partial C(q, \hat{K}^{LD}(q))}{\partial q} + \frac{\partial C(q, \hat{K}^{LD}(q))}{\partial K} \frac{\partial \hat{K}^{LD}(q)}{\partial q}$$

となり，$\hat{K}^{LD}(q)$ の部分を微分した右辺第 2 項も計算する必要があると一見思われる．しかし，包絡線定理の結論としては不要であり，$\hat{K}^{LD}(q)$ を通した間接的影響の部分は，あたかも定数であるかのように微分しなくてもよい．理由は単純で，そもそも最小化問題 (15) の 1 階条件より $\partial C(q, \hat{K}^{LD}(q))/\partial K = 0$ となり，間接的な影響は消えてしまうからである．これが，包絡線定理の本質に他ならない．

続いて，包絡線定理を図 2 の左パネルを用いて図解してみよう．ある生産量 q^0 の下での最小化問題 (15) の解を K^0 とする：$K^0 = \hat{K}^{LD}(q^0)$．長期費用曲線 $C^L(q)$ と K^0 の下での短期費用曲線 $C(q, K^0)$ を比較すると，

- 各生産量 q の下で，$C^L(q)$ は最小化問題 (15) の最小値なので，$C^L(q) \leq C(q, K^0)$ が成立する．すなわち，長期費用曲線 $C^L(q)$ は短期費用曲線 $C(q, K^0)$ の下方にある．
- 生産量 q^0 の下では，K^0 が最小化問題 (15) の解なので，$C^L(q^0) = C(q^0, K^0)$ が成立する．すなわち，生産量 q^0 において，長期費用曲線 $C(q)$ は短期費用曲線 $C(q, K^0)$ と共有点を持つ．

[8] つまり，$\min_K C(q, K)$ は $\max_K -C(q, K)$ に変換できる．
[9] 両辺のマイナスは取り払った後の式である．

以上から，生産量 q^0 において，長期費用曲線 $C^L(q)$ は短期費用曲線 $C(q, K^0)$ に（下から）接することになり，したがって，両曲線は同じ傾きを持つことになり，ゆえに，$C^L(q)$ と $C(q, K^0)$ の微分係数が一致する．(16) はこのことを式で表したものである．同様の理由で，さらに任意の生産量（図では q^0, q^1, q^2）について，長期費用曲線は，各生産量ごとに最適な資本量（図では $K^0 = \hat{K}^{LD}(q^0)$，$K^1 = \hat{K}^{LD}(q^1)$，$K^2 = \hat{K}^{LD}(q^2)$）を固定した短期費用曲線たちに下から接する．したがって，長期費用曲線はこれら短期費用曲線たちを（下から）ピッタリと包んでいなくてはならない．すなわち，教科書 2.10.1 節で図 2 左パネルと同様の図を用いて確認したように，長期費用曲線は短期費用曲線群の（下方）包絡線である[10]．図 2 の右パネルに見られるように，この例と同様のことが一般の最大化問題 (13) で

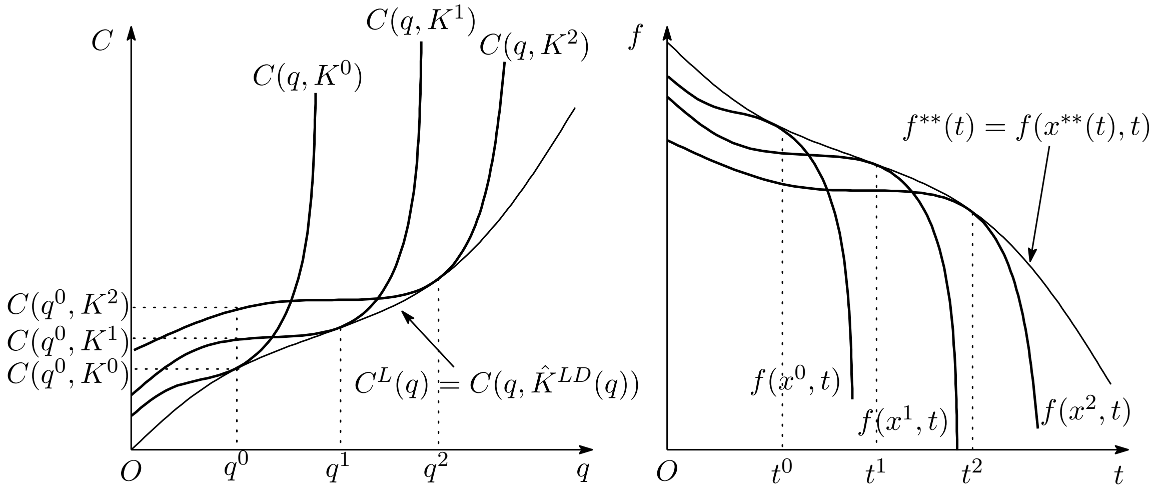

図 2: 包絡線定理

も成り立つ．すなわち，最大値 $f^{**}(t)$ のグラフは，あるパラメーター t^0 の下で最適な変数 $x^0 = x^{**}(t^0)$ を固定した $f(x^0, t)$ のグラフと t^0 で（この場合は最大値なので上から）接し，さらに，変数 x をいろいろに固定（図では $x^0 = x^{**}(t^0)$，$x^1 = x^{**}(t^1)$，$x^2 = x^{**}(t^2)$）した最大化前の値 $f(x, t)$ のグラフ群の（上方）包絡線となる．それゆえ，系 1 は「包絡線定理」と呼ばれるのである．

シェパードの補題　支出最小化問題に包絡線定理を適用すると，**シェパードの補題** (Shephard's lemma) と呼ばれる次の定理が得られる．支出関数（左辺）と補償需要関数（右辺）の関係を表す恒等式である．

定理 3 (シェパードの補題)**.**

$$\frac{\partial e(p_1, p_2, \bar{u})}{\partial p_i} = x_i^c(p_1, p_2, \bar{u}).$$

教科書 pp. 62–63「■スルツキー方程式」でも述べたように，この定理の直観は明快であ

[10] 短期費用曲線の中には長期費用曲線と共有点を持たないものもあり得る（どの生産量においても最適にはならない資本量を固定した場合）．しかしこの場合も，長期費用が最小化問題の最小値であることより，当該の短期費用曲線の下方に長期費用曲線が位置する．したがって，長期費用曲線はこれらも加えたすべての短期費用曲線群の下方包絡線である．

る．消費者にとって，その財の価格が（限界的に）1 単位 (例えば円) 上昇したときの支出増加分[11]は，

$$\text{支出増加（左辺）} = 1\,\text{円} \times \text{需要量（右辺）}$$

で与えられるということである．

ロワの恒等式　一方，効用最大化問題に包絡線定理を適用すると，

$$\frac{\partial v(p_1, p_2, M)}{\partial p_i} = -\lambda^*(p_1, p_2, M) x_i^D(p_1, p_2, M) \tag{17}$$

$$\frac{\partial v(p_1, p_2, M)}{\partial M} = \lambda^*(p_1, p_2, M) \tag{18}$$

が言える．

式 (18) はラグランジュ乗数の経済学的意味を教えてくれる重要な式である．この式によると，ラグランジュ乗数（右辺）は，所得の増加 1 単位あたりの効用の増分[12]（左辺）に等しい．このことから，ラグランジュ乗数は所得の限界効用を表わしていると言われることがある[13]．もっと卑近な言い方をすれば，ちょうど速さ（m/秒）が追加時間 1 秒当たりの移動距離の増分という「時間当たり移動距離」を表すように，追加所得 1 円あたりの効用の増分である λ^* は「所得あたり効用（効用単位/円）」を表すと解釈できる．

式 (17) の直観はシェパードの補題に準じる．消費者にとって，その財の価格が（限界的に）1 単位 (例えば円) 上昇したときの実質所得の目減りは $-(1 \times \text{需要量})$ 円であるが，これによって損なわれる効用減少分は，所得あたり効用 λ^* で単位換算されて，

$$\text{効用減少（左辺）} = \text{所得あたり効用} \times -(1\,\text{円} \times \text{需要量})\,\text{(右辺)}$$

で与えられるということである．

式 (17) を式 (18) で各辺ごとに除すと，**ロワの恒等式** (Roy's identity) と呼ばれる次の定理が得られる．間接効用関数（左辺）と需要関数（右辺）の関係を表す恒等式である．

定理 4 (ロワの恒等式).

$$-\frac{\partial v(p_1, p_2, M)/\partial p_i}{\partial v(p_1, p_2, M)/\partial M} = x_i^D(p_1, p_2, M). \tag{19}$$

1.4　スルツキー方程式

命題 1 の第 1 式は恒等式なので，両辺を p_j で偏微分したもの同士も等しい．よって，

$$\frac{\partial x_i^D(p_1, p_2, e(p_1, p_2, \bar{u}))}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i^D(p_1, p_2, e(p_1, p_2, \bar{u}))}{\partial M} \frac{e(p_1, p_2, \bar{u})}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i^c(p_1, p_2, \bar{u})}{\partial p_j}$$

[11] より正確には，最小化された支出の増加分，すなわち，当該の価格上昇に対して効用を保つために最小限必要な支出の増分である．

[12] より正確には，最大化された効用の増分，すなわち，当該の所得増加に対してその所得の範囲内で最大限得られる効用の増分である．

[13] 教科書 p. 47 にコブ・ダグラス効用関数での例がある．

が得られる．シェパードの補題より，

$$\frac{\partial x_i^D(p_1,p_2,e(p_1,p_2,\bar{u}))}{\partial p_j}+\frac{\partial x_i^D(p_1,p_2,e(p_1,p_2,\bar{u}))}{\partial M}x_j^c(p_1,p_2,\bar{u})=\frac{\partial x_i^c(p_1,p_2,\bar{u})}{\partial p_j}$$

となる．ここで $\bar{u}=v(p_1,p_2,M)$ の場合を考える．$\bar{u}=v(p_1,p_2,M)$ を上式に代入して，命題 1 の第 4 式と第 3 式を用いると，

$$\frac{\partial x_i^D(p_1,p_2,M)}{\partial p_j}+\frac{\partial x_i^D(p_1,p_2,M)}{\partial M}x_j^D(p_1,p_2,M)=\frac{\partial x_i^c(p_1,p_2,v(p_1,p_2,M))}{\partial p_j} \tag{20}$$

となる．よって，**スルツキー方程式** (Slutsky equation) と呼ばれる次の定理が得られる．

定理 5 (スルツキー方程式)**.**

$$\frac{\partial x_i^D(p_1,p_2,M)}{\partial p_j}=\frac{\partial x_i^c(p_1,p_2,v(p_1,p_2,M))}{\partial p_j}-x_j^D(p_1,p_2,M)\frac{\partial x_i^D(p_1,p_2,M)}{\partial M}.$$

特に，$j=i$ の場合は，

$$\frac{\partial x_i^D(p_1,p_2,M)}{\partial p_i}=\frac{\partial x_i^c(p_1,p_2,v(p_1,p_2,M))}{\partial p_i}-x_i^D(p_1,p_2,M)\frac{\partial x_i^D(p_1,p_2,M)}{\partial M}.$$

本節冒頭で述べたように，これは価格効果を代替効果と所得効果に分解する式である．

また，式 (20) の形で見ると，左辺にある通常の需要の価格効果（価格弾力性）や所得効果（所得弾力性）は現実に観察可能であるが，右辺にある補償需要による代替効果は，実質所得の変化を補償した架空のものであるため，観察不能である．したがって，スルツキー方程式は，観察可能な通常の需要関数（左辺）の情報から，観察不能な補償需要関数（右辺）の情報を導く式とも考えることができる．

最後に，教科書 p. 64，脚注 19 にあるようにスルツキー方程式を弾力性に基づいた形に変形したものを提示しておく：

$$\epsilon_{ii}(p_1,p_2,M)=\epsilon_{ii}^c(p_1,p_2,v(p_1,p_2,M))-\frac{p_i x_i^D(p_1,p_2,M)}{M}\epsilon_{iM}(p_1,p_2,M).$$

ここで，ϵ_{iM} は第 i 財の需要の所得弾力性，ϵ_{ii} は需要の自己価格弾力性，ϵ_{ii}^c は補償需要の自己価格弾力性とでも言うべきもの，$p_i x_i^D(p_1,p_2,M)/M$ は第 i 財への支出割合である．言うまでもなく，左辺が価格効果，右辺第 1 項が代替効果，右辺第 2 項が所得効果に対応している．

1.5　双対性のまとめ

以上のことは，図 3 のようにまとめることができる．

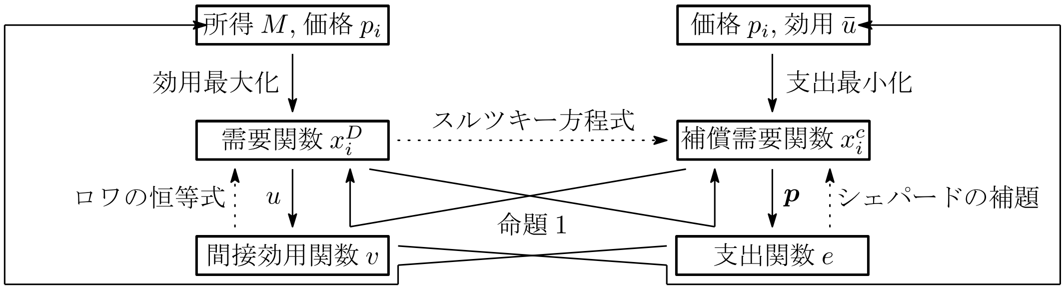

図 3: 双対性

2 価格変化と補償需要

教科書第 1 章では価格変化が（通常の）需要に与える影響をつぶさに学んできたが，この節ではそれらの結果と比較しつつ，価格変化が補償需要に与える影響をまとめておきたい．

自己価格の変化 教科書 1.6.3 節では，自己価格の変化が（通常の）需要に与える影響として次のことを学んだ．代替効果と所得効果が相反する方向に働くことがあり，自己価格の上昇に対して，需要は増加し得る（ギッフェン財）．一方，補償需要は代替効果だけを取り出したものであるため，自己価格の上昇に対して，常に補償需要は減少する．このことは，**補償需要法則** (compensated law of demand) と呼ばれ，数学的には次のように記述できる．

命題 4 (補償需要法則).

$$\frac{\partial x_i^c(p_1, p_2, \bar{u})}{\partial p_i} \leq 0.$$

2 財の場合，補償需要は無差別曲線に沿った需要変化（図 1 参照）であるため，限界代替率逓減の法則より補償需要法則が成立することは明らかである．しかしここでは，3 財以上への拡張に興味のある読者のために，さらに数学的な証明を与えておく[14]．

証明. 二つの価格の組 (p_1, p_2)，(p_1', p_2') をとってくる．$(x_1^c(p_1, p_2, \bar{u}) + p_2 x_2^c(p_1, p_2, \bar{u}))$ と $(x_1^c(p_1', p_2', \bar{u}) + p_2 x_2^c(p_1', p_2', \bar{u}))$ は，それぞれ，価格の組 (p_1, p_2)，(p_1', p_2') と効用 $\bar{u}$ の下での支出最小化問題の解なので，制約条件

$$u(x_1^c(p_1, p_2, \bar{u}), x_2^c(p_1, p_2, \bar{u})) = \bar{u},\ u(x_1^c(p_1', p_2', \bar{u}), x_2^c(p_1', p_2', \bar{u})) = \bar{u}$$

を満たすことに注意しておく．さて，(p_1, p_2) の下では，$(x_1^c(p_1, p_2, \bar{u}) + p_2 x_2^c(p_1, p_2, \bar{u}))$ が支出最小化問題の解なので，制約条件を満たすいかなる消費計画より小さい支出をもたらす．ゆえに，

$$p_1 x_1^c(p_1, p_2, \bar{u}) + p_2 x_2^c(p_1, p_2, \bar{u}) \leq p_1 x_1^c(p_1', p_2', \bar{u}) + p_2 x_2^c(p_1', p_2', \bar{u}),$$

すなわち，

$$-p_1(x_1^c(p_1', p_2', \bar{u}) - x_1^c(p_1, p_2, \bar{u})) - p_2(x_2^c(p_1', p_2', \bar{u}) - x_2^c(p_1, p_2, \bar{u})) \leq 0 \tag{21}$$

[14]以下の証明方法は，n 財のケースにも同様に適用可能であることを見て取ってほしい．

となる．一方，(p_1', p_2') の下では，$(x_1^c(p_1', p_2', \bar{u}) + p_2 x_2^c(p_1', p_2', \bar{u}))$ が支出最小化問題の解なので，制約条件を満たすいかなる消費計画より小さい支出をもたらす．ゆえに，

$$p_1' x_1^c(p_1', p_2', \bar{u}) + p_2' x_2^c(p_1', p_2', \bar{u}) \leq p_1' x_1^c(p_1, p_2, \bar{u}) + p_2' x_2^c(p_1, p_2, \bar{u}),$$

すなわち，

$$p_1'(x_1^c(p_1', p_2', \bar{u}) - x_1^c(p_1, p_2, \bar{u})) + p_2'(x_2^c(p_1', p_2', \bar{u}) - x_2^c(p_1, p_2, \bar{u})) \leq 0 \tag{22}$$

となる．式 (21)，式 (22) の辺々を加えると，

$$(p_1' - p_1)(x_1^c(p_1', p_2', \bar{u}) - x_1^c(p_1, p_2, \bar{u})) + (p_2' - p_2)(x_2^c(p_1', p_2', \bar{u}) - x_2^c(p_1, p_2, \bar{u})) \leq 0$$

が得られる．ここで，実数 $\Delta \neq 0$ に対して，$p_1' = p_1 + \Delta$，$p_2' = p_2$ とすると，

$$\Delta(x_1^c(p_1 + \Delta, p_2, \bar{u}) - x_1^c(p_1, p_2, \bar{u})) \leq 0$$

となる．両辺を Δ^2 で除すと，

$$\frac{x_1^c(p_1 + \Delta, p_2, \bar{u}) - x_1^c(p_1, p_2, \bar{u})}{\Delta} \leq 0$$

が得られる．ここで，Δ を 0 に近づけると，

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{x_1^c(p_1 + \Delta, p_2, \bar{u}) - x_1^c(p_1, p_2, \bar{u})}{\Delta} \leq 0$$

となる．この左辺は，補償需要関数の p_1 についての偏微分係数に他ならないので，

$$\frac{\partial x_1^c(p_1, p_2, \bar{u})}{\partial p_1} \leq 0$$

が言える．第 2 財についても同様のことが成り立つ．□

他財価格の変化　教科書 1.6.4 節では，他財価格の変化が（通常の）需要に与える影響として次のことを学んだ．2 財の場合，代替効果と所得効果が相反する方向に働くことがあり，他財価格の上昇に対して，需要は減少し得る（粗補完財）．一方，補償需要は代替効果だけを取り出したものであるため，2 財の場合，他財価格の上昇に対して，常に補償需要は増加する（代替財）．

命題 5. $i, j = 1, 2$，$i \neq j$ のとき，

$$\frac{\partial x_i^c(p_1, p_2, \bar{u})}{\partial p_j} \geq 0.$$

2 財の場合，先と同様に限界代替率逓減の法則より，この命題が成立することは明らかであるが，3 財以上の場合には，この命題に相当するものが成り立つとは限らないことに注意したい[15]．

命題 5 を示すため，次の**オイラーの同次関数定理** (Euler's homogeneous function theorem) と呼ばれる定理を用意する．

[15] 以下の証明は，財の種類が 2 であることに強く依存していることを見て取ってほしい．

定理 6 (オイラーの同次関数定理)**.** α 次同次関数 f に対して，

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i} x_i = \alpha f(x_1, \ldots, x_n)$$

が成り立つ.

証明. f は α 次同次関数なので，

$$t^{\alpha} f(x_1, \ldots, x_n) = f(tx_1, \ldots, tx_n)$$

が成り立つ．この両辺を t で偏微分すると，

$$\alpha t^{\alpha-1} f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(tx_1, \ldots, tx_n)}{\partial (tx_i)} \frac{\partial tx_i}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(tx_1, \ldots, tx_n)}{\partial (tx_i)} x_i$$

となる．これは $t = 1$ の場合も成り立つので，

$$\alpha f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i} x_i$$

が得られる. □

この定理を用いて命題 5 は次のように証明される.

証明. 命題 2 (iii) より，x_i^c は 0 次同次関数である．よって，オイラーの同次関数定理より，

$$p_1 \frac{\partial x_i^c(p_1, p_2, \bar{u})}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial x_i^c(p_1, p_2, \bar{u})}{\partial p_2} = 0$$

が得られる．これと，補償需要法則，および，価格が正であることから，上記の命題が得られる． □

対称性 また，二つの財が代替財か補完財であるかは，代替効果が正であるか負であるかによって定義された（教科書 p. 67）．以下の命題はこの定義が整合的であることを保証する.

命題 6.

$$\frac{\partial x_1^c(p_1, p_2, \bar{u})}{\partial p_2} = \frac{\partial x_2^c(p_1, p_2, \bar{u})}{\partial p_1}.$$

命題 6 を示すのに，次の**ヤングの定理** (Young's theorem) と呼ばれる定理を用いる.

定理 7 (ヤングの定理)**.**

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, \ldots, x_n)\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} f(x_1, \ldots, x_n)\right).$$

この定理を用いて命題 6 は次のように証明される.

証明．ヤングの定理より，

$$\frac{\partial(\partial e(p_1,p_2,\bar{u})/\partial p_1)}{\partial p_2}=\frac{\partial(\partial e(p_1,p_2,\bar{u})/\partial p_2)}{\partial p_1}$$

が言える．ここに，シェパードの補題から得られる $\partial e(p_1,p_2,\bar{u})/\partial p_i = x_i^c(p_1,p_2,\bar{u})$ を代入すると，命題が得られる． □

つまり，第 2 財価格の変化が第 1 財に与える代替効果と，第 1 財価格の変化が第 2 財に与える代替効果は，その方向に関係なく同じである．したがって，第 1 財と第 2 財は，お互いに代替財であるか補完財であるかのどちらかである．しかし，全体の価格効果に対する概念である粗代替財と粗補完財（教科書 p. 59）に関してはこのような保証はなく，第 1 財が第 2 財の代替財であるが第 2 財は第 1 財の補完財であるというような状況があり得る．これは，全体の価格効果に含まれている所得効果が，両財の間で一般に異なるためである[16]．

3　利潤関数・費用関数の微分

教科書第 2 章では，費用最小化と利潤最大化を学んだ．実は，最小化された費用（費用関数）と最小化する投入量（生産量条件付要素需要関数）の間には，1.3 節で出てきた最小化された支出（支出関数）と最小化する消費量（補償需要関数）の間の関係（シェパードの補題）と同様の関係が成り立つ．同じく，最大化された利潤（利潤関数）と最大化する生産量・投入量（供給関数・要素需要関数）の間にも同様の関係が成り立つ．本節では，この点を確認することにする．

シェパードの補題　教科書の 2.8 節で扱った長期の**費用最小化問題** (cost minimization problem)

$$\min_{(L,K)} \quad wL+rK$$
$$\text{subject to} \quad x=f(L,K)$$

について考える．この最小化問題の解を $(\hat{L}^{LD}(x,w,r),\hat{K}^{LD}(x,w,r))$，最小値を $C^L(x,w,r)$ とする．関数 $\hat{L}^{LD}$，$\hat{K}^{LD}$ は**生産量条件付要素需要関数** (factor demand function conditional on the requirement of the output level) であり，関数 C^L **費用関数** (cost function) は費用関数である．

包絡線定理より，**シェパードの補題** (Shephard's lemma) と呼ばれる次の定理が得られる．

定理 8 (シェパードの補題)．

$$\frac{\partial C^L(x,w,r)}{\partial w}=\hat{L}^{LD}(x,w,r)$$
$$\frac{\partial C^L(x,w,r)}{\partial r}=\hat{K}^{LD}(x,w,r).$$

[16] スルツキー方程式で $i=1$，$j=2$ と $i=2$，$j=1$ の場合の両式を見比べてこのことを確認してほしい．所得効果の項を構成する要素である x_1^D と x_2^D（需要量）や $\partial x_1^D/\partial M$ と $\partial x_2^D/\partial M$（所得弾力性）が，第 1 財と第 2 財で常に一致する理由はない．

このシェパードの補題の背後にある直観は，1.3 節で出てきたシェパードの補題と同様である．すなわち，生産者にとって，生産要素の価格が（限界的に）1 単位 (例えば円) 上昇したときの費用の増加分[17]は，

$$\text{費用の増加（左辺）} = 1\,\text{円} \times \text{生産要素需要量（右辺）}$$

で与えられるということである．

ホテリングの補題　教科書の 2.7 節で扱った長期の**利潤最大化問題** (profit maximization problem)

$$\begin{aligned} \max_{(x,L,K)} \quad & px - (wL + rK) \\ \text{subject to} \quad & x = f(L,K) \end{aligned}$$

について考える．この最大化問題の解を $(x^{LS}(p,w,r), L^{LD}(p,w,r), K^{LD}(p,w,r))$，最大値を $\pi^L(p,w,r)$ とする．関数 x^{LS} は**供給関数** (supply function) であり，関数 L^{LD}，K^{LD} は**要素需要関数** (factor demand function) である．最大化された利潤を表わす関数 π^L を**利潤関数** (profit function) と言う．

包絡線定理より，**ホテリングの補題** (Hotelling's lemma) と呼ばれる次の定理が得られる．

定理 9 (ホテリングの補題)**.**

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi^L(p,w,r)}{\partial p} &= x^{LS}(p,w,r) \\ \frac{\partial \pi^L(p,w,r)}{\partial w} &= -L^{LD}(p,w,r) \\ \frac{\partial \pi^L(p,w,r)}{\partial r} &= -K^{LD}(p,w,r). \end{aligned}$$

ホテリングの補題の背後にある直観は，1.3 節で出てきたシェパードの補題と同様である．すなわち，生産者にとって，財の価格が（限界的に）1 単位上昇したときの利潤の増加分は，

$$\text{利潤の増加（左辺）} = 1\,\text{円} \times \text{財の生産量（右辺）}$$

で与えられ，生産要素の価格が（限界的に）1 単位 (例えば円) 上昇したときの利潤の減少分は，

$$\text{利潤の減少（左辺）} = -1\,\text{円} \times \text{生産要素の需要量（右辺）}$$

で与えられるということである．

[17] より正確には，最小化された支出の増加分，すなわち，当該生産要素の価格上昇に対して生産量を保つために最小限必要な費用の増分である．

4　消費者余剰の変化・補償変分・等価変分

教科書の復習　教科書3.2.2節では，市場取引によって得られる消費者の便益の指標として，消費者余剰を定義した．さらに，**準線形効用関数** (quasilinear utility function) を用いて厳密な意味づけを行った．準線形効用関数の下では，財をある価格である数量だけ購入したときの消費者余剰は,「その購入によって得られる効用を金額で表したもの」である．実は，準線形効用関数の持つ以下の二つの性質が，このような望ましい結果を得るための裏付けとなっている：

- 貨幣1単位がちょうど効用1単位に相当する（貨幣尺度の効用関数である）こと．
- 需要量が所得に依存しない（所得効果がゼロとなる効用関数である）こと．

本節では，より一般的に同様のことが成立するかどうかを詳しく見ていく．双対性アプローチで得られた補償需要関数・間接効用関数・支出関数を活用すると，一般の選好について，それを表す貨幣尺度の効用が定義でき，所得効果が小さい場合に，消費者余剰が消費者の便益を測る指標として尤もらしいことが確認できる（教科書 p. 138「■消費者余剰と補償変分」には本節の内容が入門的に述べられている）．

需要曲線と補償需要曲線　第1財が正常財であるとする．所得 M と第2財の価格 p_2 を固定し，第1財の価格 $\bar{p}_1$ をとってくる．このとき，需要曲線（$x_i^D(p_1, p_2, M)$）と補償需要曲線（$x_i^c(p_1, p_2, v(\bar{p}_1, p_2, M))$）の関係を図示したい．$p_1' \geq \bar{p}_1$ なる第1財の価格 p_1' をとってくる．命題3 (i) より，

$$v(p_1', p_2, M) \leq v(\bar{p}_1, p_2, M)$$

となる．したがって，命題3 (ii) より，

$$e(p_1', p_2, v(p_1', p_2, M)) \leq e(p_1', p_2, v(\bar{p}_1, p_2, M))$$

が得られる．ゆえに，第1財が正常財であるので，

$$x_1^D(p_1', p_2, e(p_1', p_2, v(p_1', p_2, M))) \leq x_1^D(p_1', p_2, e(p_1', p_2, v(\bar{p}_1, p_2, M))) \tag{23}$$

が言える．ここで，命題1第4式より，$e(p_1', p_2, v(p_1', p_2, M)) = M$ であり，命題1第1式より，$x_1^D(p_1', p_2, e(p_1', p_2, v(\bar{p}_1, p_2, M))) = x_1^c(p_1', p_2, v(\bar{p}_1, p_2, M))$ であることに注意すると，

$$x_1^D(p_1', p_2, M) \leq x_1^c(p_1', p_2, v(\bar{p}_1, p_2, M))$$

が得られる．同様にして，$p_1'' \leq \bar{p}_1$ なる第1財の価格 p_1'' に対しては，逆の不等式が成り立つ．

以上から，当該財が正常財のときには，図4のように，

- 価格が $\bar{p}_1$ より高ければ需要曲線は補償需要曲線の左に位置し，
- 価格が $\bar{p}_1$ のときには需要曲線と補償需要曲線は価格 $\bar{p}_1$ で交わり，

- 価格が $\bar{p}_1$ より低ければ需要曲線は補償需要曲線の右に位置する

ことがわかる．

需要曲線と補償需要曲線の水平方向の差は，式 (23) の左辺と右辺の差で表わされ，この左辺と右辺の差は，所得の違いによる需要量の差を表わしている（所得効果を表わしているとも言える）．したがって，需要関数が所得にあまり影響されないならば，需要曲線と補償需要曲線の乖離は小さくなる．特に，需要関数が所得から独立な場合（所得効果がゼロの場合）には，需要曲線と補償需要曲線は一致する．

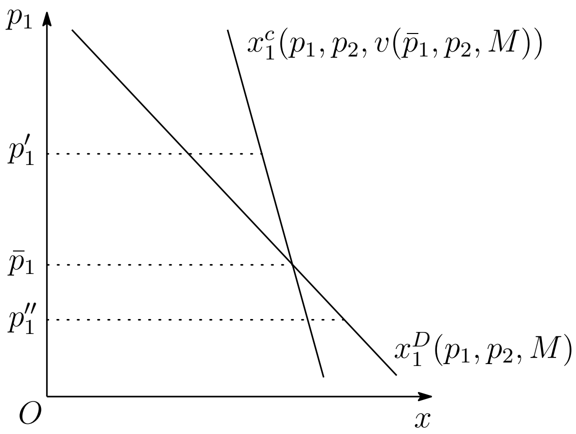

図 4: 需要曲線と補償需要曲線

貨幣尺度間接効用関数　価格が変化したときに消費者の厚生（最大化された効用）がどのように変化するかを見るには，間接効用関数の値の変化を見ればよい．ところで，教科書 pp. 32–33 で見たように，1 つの選好関係を表現する効用関数が複数あることから，1 つの選好関係の下での間接効用関数も複数存在する．具体的には，ある間接効用関数 v を単調変換した関数は，また同じ選好関係の下で得られる間接効用関数になる[18]．そのうち，**貨幣尺度間接効用関数** (money metric indirect utility function) というものを定義することにする．まず，基準となる価格の組 $(\bar{p}_1, \bar{p}_2)$ を 1 つとってくる．このとき，命題 3 より，$e(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{u})$ は $\bar{u}$ の増加関数である．したがって，v を e で単調変換した関数 $e(\bar{p}_1, \bar{p}_2, v(p_1, p_2, M))$ もまた，((p_1, p_2, M) の関数として見たとき）同じ選好関係から導かれる間接効用関数の 1 つになっている．この間接効用関数の値は，(p_1, p_2, M) の下で得られる効用水準 $v(p_1, p_2, M)$ を基準価格 $(\bar{p}_1, \bar{p}_2)$ の下で実現するための必要最小限の所得を表わしている．つまり，効用を貨幣の尺度で表わしていると見ることができる．この

[18] $\succsim$ を選好関係とする．u を，$\succsim$ を表現する効用関数とする．v を，u の下での間接効用関数とする．さて，単調変換 w によって，関数 v' を，$v'(p_1, p_2, M) = w(v(p_1, p_2, M))$ と定義する．こうして定義した v' もまた，$\succsim$ を表現するある効用関数の下での間接効用関数になっている．実際，$u'(x_1, x_2) = w(u(x_1, x_2))$ と定義される関数 u' は $\succsim$ を表現する効用関数であり，u' の下での間接効用関数の値 $u'(x_1^D(p_1, p_2, M), x_2^D(p_1, p_2, M))$ は，u と u' から同一の需要関数 x_i^D が導かれるため，

$$u'(x_1^D(p_1, p_2, M), x_2^D(p_1, p_2, M)) = w(u(x_1^D(p_1, p_2, M), x_2^D(p_1, p_2, M))) = w(v(p_1, p_2, M)) = v'(p_1, p_2, M)$$

となる．

間接効用関数を用いると，価格の組が (p_1^0, p_2^0) から (p_1^1, p_2^1) が変化した時の厚生の変化は，$e(\bar{p}_1, \bar{p}_2, v(p_1^1, p_2^1, M)) - e(\bar{p}_1, \bar{p}_2, v(p_1^0, p_2^0, M))$ で表わされる．

補償変分と等価変分　ところで，どのような基準価格 $(\bar{p}_1, \bar{p}_2)$ を用いるかには選択の余地がある．

一つの自然な選択として，変化前の価格の組 (p_1^0, p_2^0) を基準とすることが考えられ，これを用いた厚生の変化を**等価変分** (equivalent variation) と言い，EV で表わす（次の式の1行目から2行目への変形と2行目から3行目への変形には，命題1が用いられている）：

$$\begin{aligned} EV &= e(p_1^0, p_2^0, v(p_1^1, p_2^1, M)) - e(p_1^0, p_2^0, v(p_1^0, p_2^0, M)) \\ &= e(p_1^0, p_2^0, v(p_1^1, p_2^1, M)) - M \\ &= e(p_1^0, p_2^0, v(p_1^1, p_2^1, M)) - e(p_1^1, p_2^1, v(p_1^1, p_2^1, M)). \end{aligned}$$

上式の最後の行は，価格変化後の効用を実現するための最小限の所得が，価格変化によってどれぐらい変化したかを表わしていると解釈できる．

もう一つは，変化後の価格の組 (p_1^1, p_2^1) を基準とすることが考えられ，これを用いた厚生の変化を**補償変分** (compensating variation) と言い，CV で表わす（次の式の1行目から2行目への変形と2行目から3行目への変形には，命題1が用いられている）：

$$\begin{aligned} CV &= e(p_1^1, p_2^1, v(p_1^1, p_2^1, M)) - e(p_1^1, p_2^1, v(p_1^0, p_2^0, M)) \\ &= M - e(p_1^1, p_2^1, v(p_1^0, p_2^0, M)) \\ &= e(p_1^0, p_2^0, v(p_1^0, p_2^0, M)) - e(p_1^1, p_2^1, v(p_1^0, p_2^0, M)). \end{aligned}$$

上式の最後の行は，価格変化前の効用を実現するための最小限の所得が，価格変化によってどれぐらい変化したかを表わしていると解釈できる．この解釈は，教科書 p. 61 での補償変分の解釈と同じである．

消費者余剰の変化と補償変分・等価変分の関係　ここで，第2財の価格 p_2 は変化せず，第1財の価格のみが p_1^0 から p_1^1 に上昇した場合を考える．

シェパードの補題より，

$$\begin{aligned} \int_{p_1^0}^{p_1^1} x_1^c(p_1, p_2, v(p_1^1, p_2, M)) dp_1 &= \int_{p_1^0}^{p_1^1} \frac{\partial e(p_1, p_2, v(p_1^1, p_2, M))}{\partial p_1} dp_1 \\ &= [e(p_1, p_2, v(p_1^1, p_2, M))]_{p_1^0}^{p_1^1} \\ &= e(p_1^1, p_2, v(p_1^1, p_2, M)) - e(p_1^0, p_2, v(p_1^1, p_2, M)) = -EV \end{aligned}$$

が得られる．この左辺は図5の $p_1^0 p_1^1 D^1, D^e$ の面積を表わしているので，等価変分は $p_1^0 p_1^1 D^1, D^e$ の面積に -1 を乗じた値になる．また，シェパードの補題より，

$$\begin{aligned} \int_{p_1^0}^{p_1^1} x_1^c(p_1, p_2, v(p_1^0, p_2, M)) dp_1 &= \int_{p_1^0}^{p_1^1} \frac{\partial e(p_1, p_2, v(p_1^0, p_2, M))}{\partial p_1} dp_1 \\ &= [e(p_1, p_2, v(p_1^0, p_2, M))]_{p_1^0}^{p_1^1} \\ &= e(p_1^1, p_2, v(p_1^0, p_2, M)) - e(p_1^0, p_2, v(p_1^0, p_2, M)) = -CV \end{aligned}$$

が得られる．この左辺は図 5 の $p_1^0 p_1^1 D^c D^0$ の面積を表わしているので，補償変分は $p_1^0 p_1^1 D^c D^0$ の面積に -1 を乗じた値になる．

ところで，第 1 財の価格が p_1^0 で，第 1 財の取引量が $x_1^D(p_1^0, p_2, M)$ であるときの**消費者余剰** (consumer's surplus) は図 5 の線 $p_1^0 D^0$ および需要曲線，縦軸に囲まれた領域の面積で表わされ，第 1 財の価格が p_1^1 で，第 1 財の消費量が $x_1^D(p_1^1, p_2, M)$ であるときの消費者余剰は図 5 の線 $p_1^1 D^1$ および需要曲線，縦軸に囲まれた領域の面積で表わされる．ゆえに，消費者余剰の変化 ΔCS は，図 5 の $p_1^0 p_1^1 D^1 D^0$ の面積に -1 を乗じた値になる．

以上から，次の関係が成り立つことが分かる．

$$CV \le \Delta CS \le EV.$$

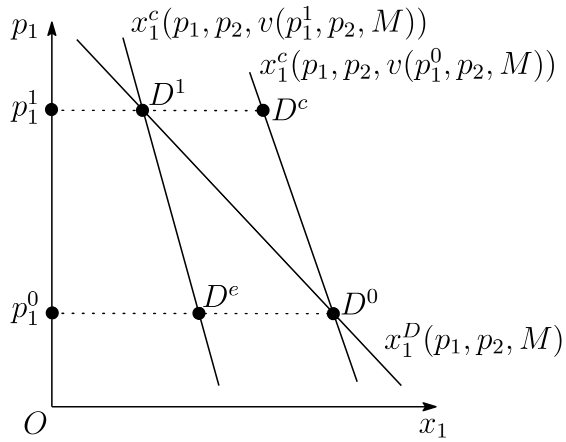

図 5: 消費者余剰の変化と補償変分・等価変分

ところで，需要関数が所得からあまり影響を受けない場合（所得効果が小さい場合）には，需要曲線と補償需要曲線の乖離が小さいため，消費者余剰の変化は，等価変分および補償変分と近い値になる．特に，需要曲線が所得からまったく影響を受けない場合（所得効果がゼロの場合）には，需要曲線と二つの補償需要曲線は一致するため，消費者余剰の変化は，等価変分および補償変分と一致する．実際，準線形効用関数 $u(x, m) = w(x) + m$ の場合[19]，効用最大化および支出最小化の条件はともに $w'(x) = p$ となり，需要関数と補償需要関数が一致する．よって，消費者余剰の変化が，等価変分および補償変分と一致することになる．こうしたことから，需要曲線が所得からあまり影響を受けない場合には，消費者余剰は貨幣を尺度とした効用を近似的に表わしていると言え，厚生を測る指標として近似的に適切なものであると考えられる．

[19] 教科書では w の代わりに v を用いていた．